PD-22

Rytov 法とモーメント法によるビーム波の大気揺動解析

Comparison of the Rytov method and the moment equation method
for analyzing atmospheric turbulence of beam wave

豊田雅宏　情報通信研究機構

Masahiro Toyoda　National institute of information and communication technology

Abstract Beam wave fluctuated by atmospheric turbulence is descried. Numerically calculation is conducted for beam wave fluctuation using two analytical methods. One is the Rytov method employing perturbation analysis, the other is the moment equation method using multiple correlation function of wave function. Calculated statistical values using the two methods are almost agreed when inner scale size of atmospheric turbulence is wider than the beam diameter. Scintillation index of a focused beam is drastically changed as a distance from beam axis. Analytical solutions of intensity valiance using the two methods also become the same shape for a general case of beam propagation.

1. はじめに

光波の大気揺動の解析法としては揺動を摂動として扱った Rytov 法が良く知られている[1]。この解析方法は物理的な理解が比較的容易な手法であることに加えて、多くの実験事実の裏付けから支持されている。ただし、Rytov 法では揺動を摂動として扱うことから、その適用範囲は弱い揺らぎと呼ばれるケースに限定される。摂動解析の範囲を超えた強い揺らぎについては、波動方程式の近似解法、Huygens の原理に基づく方法、エネルギー保存則を利用した手法、あるいは、経験的なモデル、さらに、計算機シミュレーションを組み合わせた方法等が提案されてきた[2]。それらの中で、波動の確率モーメントから統計量を導く方法に最も高い信頼が寄せられている[3]。しかしながら、特殊な場合を除いて強い揺らぎの場合の解の導出が完結していない。その最大の理由は、波動の伝搬に伴う多重散乱現象を数式で表現し、さらに、それを解析的に解くことが困難なためである。現在のところ、波動揺動の確率密度関数に及ぶまでの解法が確立、あるいは、認知されているのは、弱い揺らぎの場合の Rytov 法[4,5]と、媒質揺らぎの最小サイズ（インナースケール）よりビーム径が細い場合のモーメント法[6]のみである。

そこで本論では、ビーム波の大気揺動について、インナースケールとビーム径の大きさで分類し、Rytov 法とモーメント法での解析について比較検討をした。2 章において、ビーム波の弱い揺らぎにおける大気揺動について、両法から求めた解の数値積分を行った。ビーム波の揺動ではビーム光軸からの距離によって揺らぎの状態が異なるため、この距離をパラメータとしてビームの平均強度と分散の統計量を算出した。始めに、インナースケールよりビーム径が細い場合の、いわゆるスポットダンシング状態における強度分散を比較した。さらに、通常の形状のビーム波について、モーメント法から導いた方程式中の位相構造関数に近似を施すことによって数値解を求め、Rytov 法からの値と比較検討した。

2. ビーム波の大気揺動の数値計算

2.1 インナースケールより細いビームの分散

大気中を伝搬したGaussビーム波の長時間露光時のビーム幅（1/e）についてRytov法とモーメント法による計算結果を図1に示す。また、大気揺らぎの無い自由空間の場合の値を書き入れた。ここで、光波長を 488nm, 送信点のビーム幅（1/e）を 1.25mm, 送信点での位相面の曲率半径を 40mとした。屈折率構造定数 C_n^2の一般的な値は 10^{-17}から 10^{-12}[$m^{-2/3}$]とされており、ここでは揺らぎの影響が顕著となるように一般的範囲の上限とされる 10^{-12}[$m^{-2/3}$]に設定した。インナースケールl_0は 5mm、媒

質揺らぎの最大サイズ（アウタースケール）L_0は 10mとした。大気揺らぎの空間スペクトルにはvon Karmanスペクトルを用いた。図１に示すように、波動の揺動によって自由空間の場合と比べてビーム幅が広がる。Rytov法とモーメント法での計算結果はほぼ同様であった。僅かな差の要因は、各導出式での近似精度にあると考える。ビームの裾での対数振幅分散$\overline{\chi^2}$を求めると、伝搬距離L=100m, ビーム光軸からの距離ρ=6mmの位置では$\overline{\chi^2}=0.16$となり、Rytov法の適用範囲内であった。

図 1 から分るように、この形状のビーム伝送では伝搬距離が 20m程度までは、ビーム直径（1/e）は 3mm以下となる。一般的に数mmとされるl_0の値よりも小さい。このとき、L=20mの受光面上では、瞬時的なビームパターンが変形することなく、時間に伴いビーム中心位置が変動する、スポットダンシングが生じていると考えられる。次に、L=20mの受光面での、このビームの規格化強度分散を算出した。計算手法の検証として、Rytov法からの数値計算の結果が文献 7 のFig.1、および、文献 8 のFig.11 とほぼ合致することを確認した。ρに対する規格化強度分散を図 2 に示す。計算に用いたビーム形状、および、媒質の揺らぎは図 1 の場合と同じ設定とした。平面波の規格化強度分散$\sigma_{I\ plane}^2 = 1.23C_n^2k^{\frac{7}{6}}L^{\frac{11}{6}}$にて図 2 の縦軸を規格化しており、Rytov法から求めたグラフはC_n^2に依存しない。C_n^2が 10^{-12}[$m^{-2/3}$]の場合には、L=20mのとき$\sigma_{I\ plane}^2$は 0.058 となる。このため、図 2 の縦軸の上限においてもσ_I^2は 1.2(0.3 の 4 倍)以下となり、揺動を摂動として扱える範囲にある。一方、モーメント法ではσ_I^2 はC_n^2に依存するが、図 2 のように縦軸を線形表示した場合にはC_n^2の影響が顕著とならない。図 2 の結果には、ビームの中央、および、ビームの裾において両者に僅かな差はあるが、ビーム光軸からの距離に伴って分散が増加する傾向は同様であった。ここでのモーメント法の解析には、放物型波動方程式の適用条件以後の近似は無く、大気揺らぎの影響が表されている[6]。その上で、図 2 のように両法から算出した分散がほぼ合致したことから、Rytov法から求めた規格化強度分散にはビームの方向変動によるスポットダンシングの効果をも含むことが確認できた。なお、Rytov法は弱い揺らぎに限定された解析法であるため、媒質の揺らぎが大きくなるにつれて両者は乖離していくことになる。

2.2 インナースケールより太いビームの分散

平行な状態で出射したGaussビーム波の規格化強度分散をモーメント法（位相構造関数の一次近似）を用いて計算した。ビーム光軸からの距離に対する規格化強度分散を図 3 に示す。伝搬距離は 500mとし、送信端でのビーム幅（1/e）は 5mm、C_n^2は 10^{-14}[$m^{-2/3}$]とした。大気揺らぎの空間スペクトルにはKolmogorovスペクトルを用いた。このとき、受光面でのビーム幅（1/e）は約 10mmとなる。また、図 2 の場合と同様に、縦軸は平面波の強度分散$\sigma_{I\ plane}^2$=0.21 にて規格化している。Rytov法からの数値計算も同値であった。

次に、集光ビームについてモーメント法（位相構造関数の一次近似）にて規格化強度分散を計算した。伝搬距離は 500mとした。自由空間を伝搬した場合の集光面上のビーム幅（1/e）が 1mmとなるように、送信点でのビーム幅を約 20mm、位相面の曲率半径を約 500mに設定した。また、C_n^2を 10^{-14}[$m^{-2/3}$]とした。この場合には受光面上のビーム幅は約 3.2mmとなった。ビーム光軸からの距離ρに対する規格化強度分散を図 4 に示す。この集光ビームについて、伝搬距離が 1000mとなるまでの各位置での規格化強度分散をRytov法にて計算した。各距離での受光面においてビーム光軸上(ρ=0)、および、ρが 1mmでの規格化強度分散を図 5 に示す。この結果について、合流型超幾何関数を導入して描かれた文献 9 のFig.4(a)との整合を確認している。図 5 のグラフからLが 1000m付近にて、各ρでの分散値が球面波の場合の値 0.40$(0.49C_n^2k^{\frac{7}{6}}L^{\frac{11}{6}}/1.23C_n^2k^{\frac{7}{6}}L^{\frac{11}{6}})$に漸近していく様子が伺える。Lが 500mの焦点面では、ビーム光軸からの距離に伴い急激に

分散値が増加する。この要因は、焦点面にてビームのスポットダンシングが発生し、ビームの裾では強度変動が激しいためと考えている。なお、焦点面において、Ishimaruの示した集光ビームに対するRytov法の適用限界の近傍と言える。図 3 から図 5 に示した数値計算により、文献 9 にある「モーメント法による一次近似解がRytov法による結果と等しくなるべき」との記述を検証した。

3. おわりに

媒質揺らぎのインナースケールよりもビームが細い場合には、Rytov 法とモーメント法の解析から求めた強度分散値がほぼ合致し、ビーム光軸からの距離に伴って分散が増加する傾向を示した。このことから、Rytov 近似解析によるビーム揺動の統計値には、ビームの方向変動によるスポットダンシングによって生じる効果も含むと言える。これは、弱い揺らぎにおいてもスポットダンシングが発生し、その揺動を Rytov 法にて解析できることを意味する。また、集光面上のスポットダンシングによって、強度分散が光軸からの変位により急激に大きくなる現象を両解析法から明示した。これらにより、弱い揺らぎの場合に、細いビームや集光ビームにおいても Rytov 法の適用性を確認した。また、Rytov 法とモーメント法（位相構造関数の一次近似）の強度分散の導出式が同形となり、数値計算結果が等しいことを示した。本論文に記した大気揺動解析の検討を土台として、波動揺動が強い領域でのビーム波動解析を進めたいと考える。

参考文献

1. V. I. Tatarski, “Wave propagation in a turbulent medium,” McGraw-Hill, New York, 1961.

2. R. L. Fante, “Electromagnetic beam propagation in turbulent media: an update,” Proc. IEEE, vol.68, no.11, pp.1424-1443, 1980.

3. A. Ishimaru, “Theory and application of wave propagation and scattering in random media,” Proceedings of the IEEE, vol.65, no.7, pp.1030-1061, 1977.

4. L. C. Andrews and R. L. Phillips, “Laser beam propagation through random media,” SPIE Opt. Eng. Press, Bellingham, 1998.

5. J. W. Goodman, “Statistical optics,” Wiley, New York, 1985.

6.K. Furutsu, “Statistical theory of wave propagation in a random medium and the irradiance distribution function,” J. Opt. Soc. Am., vol.62, no.2, pp.240-254, 1972.

7. W. B. Miller, J. C. Riklin and L. C. Andrews, “Log-amplitude variance and wave structure function: a new perspective for Gaussian beams,” J. Opt. Soc. Am. A, vol.10, no.4, pp.661-672, 1993.

8. A. Ishimaru, “Fluctuations of a focused beam wave for atmospheric turbulence probing,” Proceedings of the IEEE, vol.57, no.4, pp.407-414, 1969.

9. K. Furutsu and S. Ito, “Scintillation of focused beam waves in a turbulent medium as a first –order solution of the moment equation,” Appl. Opt., vol.32, no.36, pp.7512-7527, 1993.

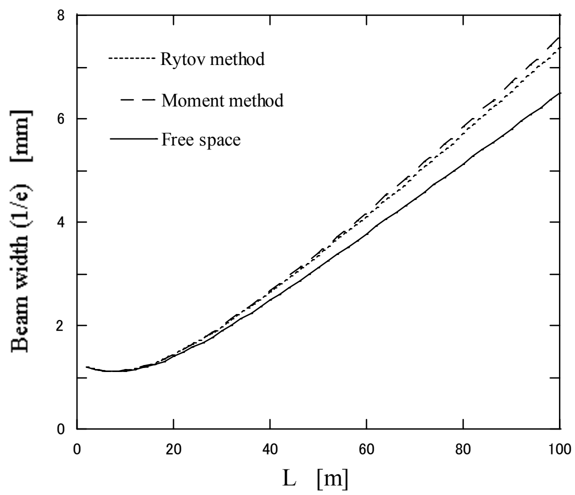

Fig. 1 Calculated beam width (1/e) of Gaussian-beam wave propagated in atmosphere and free-space.

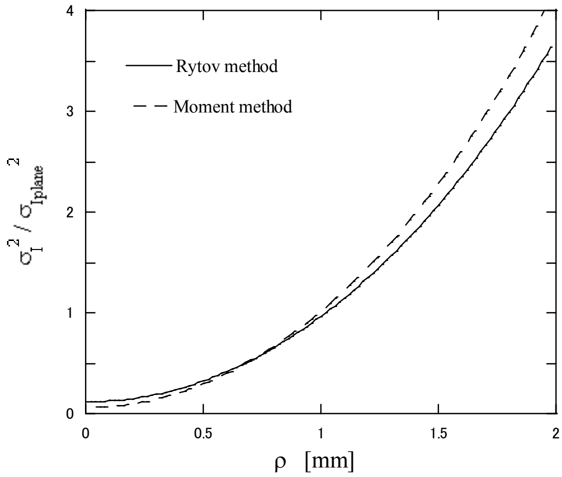

Fig. 2 Calculated normalized scintillation index of beam wave propagated 20m in case of beam diameter is smaller than inner scale size of atmospheric turbulence.

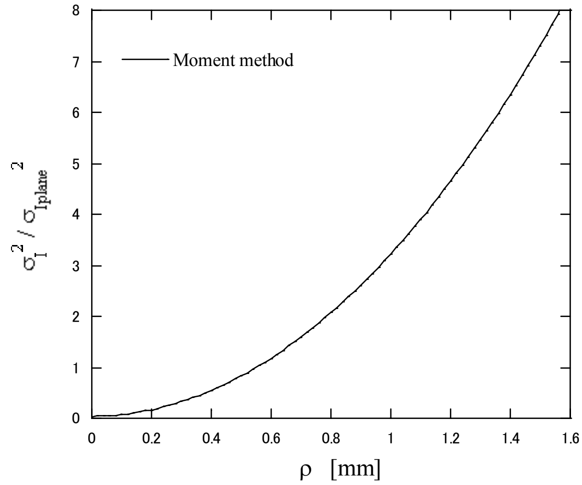

Fig. 4 Calculated normalized scintillation index of focused beam propagated 500m in case of beam diameter is wider than inner scale size of atmospheric turbulence.

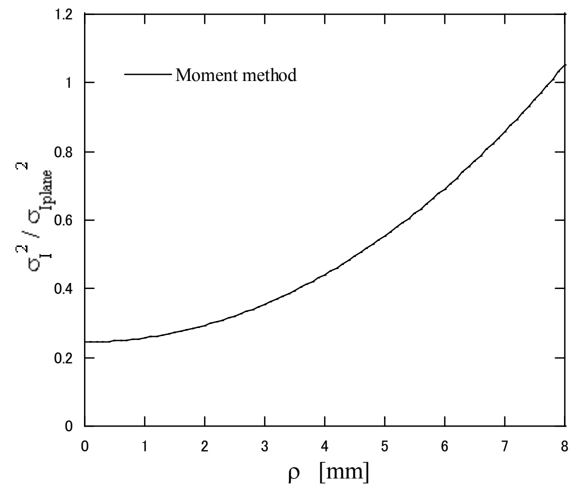

Fig. 3 Calculated normalized scintillation index of collimated beam propagated 500m in case of beam diameter is wider than inner scale size of atmospheric turbulence.

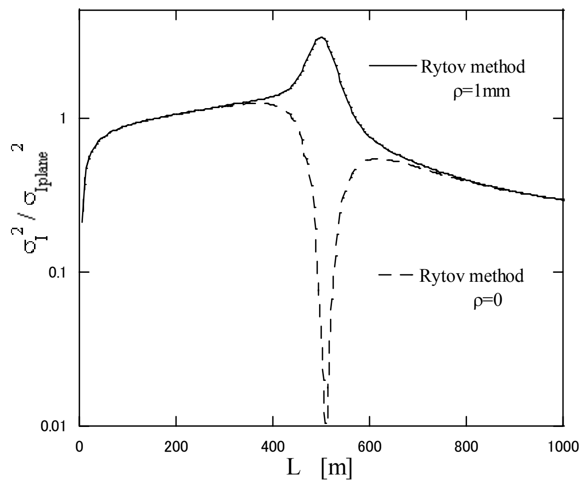

Fig. 5 Calculated normalized scintillation index of focused beam for two value of ρ, which is 0 and 1mm versus propagated length L.